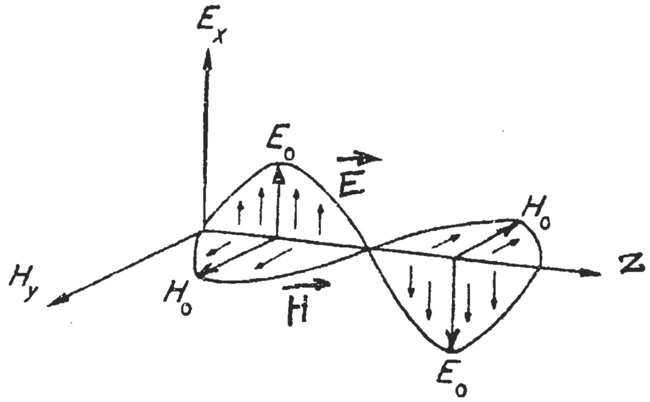
Λ. Απέκης, Π. Πίσσης και Κ. Χριστοδουλίδης

Τομέας Φυσικής,
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ – ΚΥΜΑΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΚΑΙ ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

Συμπληρωματικές σημειώσεις για το μάθημα Φυσικής (I και II) του Τμήματος Χημικών Μηχανικών



Αθήνα 2000

Οι σημειώσεις αυτές βασίζονται κυρίως στα βιβλία που αναφέρονται στη Βιβλιογραφία.

Βιβλιογραφία

1. F. S. Crawford, *Κυματική*. Σειρά Μαθημάτων Φυσικής Berkeley, τόμος 3.
2. H. J. Pain, *Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων*.
3. E.Hecht. *Οπτική*. (ΕΣΠΙ-Schaum, Αθήνα).
4. H. D. Young. *Πανεπιστημιακή φυσική*. (Εκδόσεις Παπαζήση, Αθήνα 1994). Τόμος Β΄, Κεφ. 34-38.
5. H. C. Ohanian. *Φυσική*. (Συμμετρία, Αθήνα 1991). Τόμος Β΄, Κεφ. 37-40.

Α. Συζευγμένες ταλαντώσεις

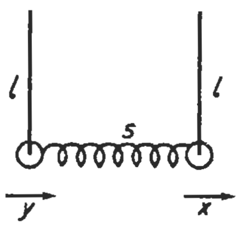
1. Εισαγωγή

Ταλαντωνόμενα συστήματα που γειτονεύουν μεταξύ τους και αλληλεπιδρούν, μεταδίδουν ενέργεια το ένα στο άλλο και οδηγούν στην κυματική κίνηση.

Θα εξετάσουμε πρώτα ένα παράδειγμα σύζευξης μεταξύ δύο εκκρεμών μέσω ελατηρίου. Θα εισαγάγουμε στο παράδειγμα αυτό τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και θα μελετήσουμε μια γενική μέθοδο εύρεσης των συχνοτήτων τους. Τέλος, θα εξετάσουμε τη συζευγμένη κίνηση μιας εκτενούς διάταξης ταλαντωτών (χορδή με σφαιρίδια), η οποία στο όριο θα μας οδηγήσει στην κυματική κίνηση.

2. Ελαστικά συζευγμένος ταλαντωτής

Θα εξετάσουμε δύο πανομοιότυπα εκκρεμή με ράβδους μήκους l χωρίς βάρος, που υποβαστάζουν μάζες m, συζευγμένα με ελατήριο σταθεράς s και φυσικού μήκους ίσου με την απόσταση των μαζών σε ισορροπία. Θεωρούμε μικρές ταλαντώσεις στο επίπεδο του σχήματος. Οι μετατοπίσεις είναι x και y. Οι εξισώσεις κίνησης των δύο μαζών είναι:



$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{l} - s(x-y) \qquad (1)$$

$$m\ddot{y} = -mg\frac{y}{l} + s(x-y) \qquad (2)$$

Με $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, προκύπτει:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{s}{m}(x-y) \qquad (3)$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = +\frac{s}{m}(x-y) \qquad (4)$$

Εισάγουμε τις νέες συντεταγμένες: $X=x+y$ (5) και $Y=x-y$ (6)

τις οποίες ονομάζουμε **κανονικές συντεταγμένες**.

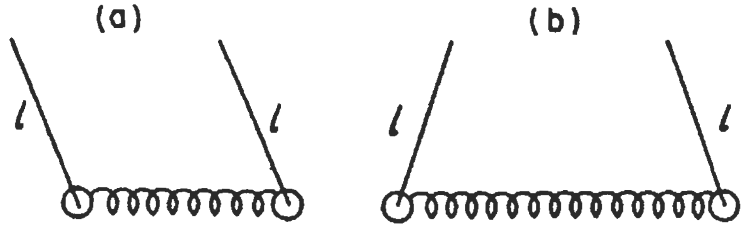
Προσθέτοντας (3) + (4): $$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \qquad (7)$$

Αφαιρώντας (3) - (4): $$\ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + \frac{2s}{m}\right)Y = 0 \qquad (8)$$

Οι X και Y περιγράφονται από απλές αρμονικές λύσεις:

$$X = x + y = X_0\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (9)$$

$$Y = x - y = Y_0\cos(\omega_2 t + \varphi_2), \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{s}{m}} \qquad (10)$$



(a) Ο τρόπος ταλάντωσης «σε φάση», ο οποίος δίνεται από την $\ddot{X}+\omega_0^2 X=0$, όπου X είναι η κανονική συντεταγμένη $X=x+y$, και $\omega_0^2=g/l$. (b) Ο τρόπος ταλάντωσης «εκτός φάσης» ο οποίος δίνεται από την $\ddot{Y}+(\omega_0^2+2s/m)Y=0$, όπου Y είναι η κανονική συντεταγμένη, $Y=x-y$.

Αν $Y=0$, τότε $x=y$ για κάθε t, και τα εκκρεμή κινούνται μαζί. Το ελατήριο δεν επηρεάζει την κίνηση. Γωνιακή συχνότητα ω_0, τρόπος ταλάντωσης “σε φάση”.

Αν $X=0$, τότε $x=-y$ για κάθε t, και τα εκκρεμή έχουν διαφορά φάσης 180°. Γωνιακή συχνότητα $\sqrt{\omega_0^2+\frac{2s}{m}}>\omega_0$, τρόπος ταλάντωσης “εκτός φάσης”.

3. Κανονικές συντεταγμένες, βαθμοί ελευθερίας, κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

(α) Οι **κανονικές συντεταγμένες** ικανοποιούν γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, με μόνο μια εξαρτημένη μεταβλητή η κάθε μια (π.χ. X, Y).

(β) Η ταλάντωση που περιγράφεται από μια κανονική συντεταγμένη, ονομάζεται **κανονικός τρόπος ταλάντωσης** και έχει τη δική του κανονική συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται όλα τα μέρη του συστήματος.

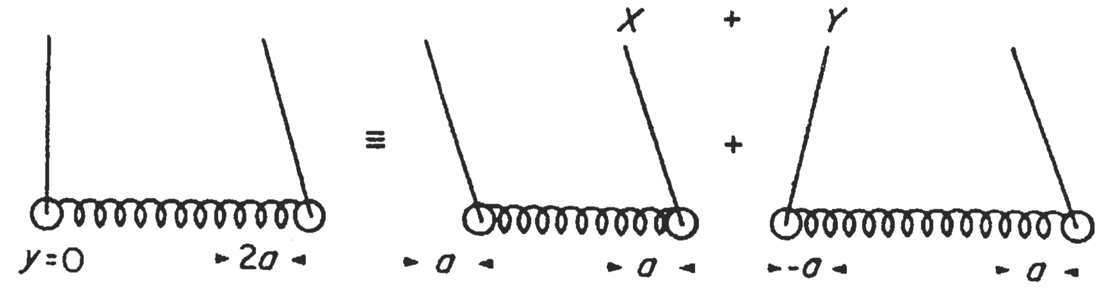
(γ) Η ολική ενέργεια του συστήματος χωρίς απόσβεση: $E_{ολ}=aX^2+bY^2+c\dot{X}^2+d\dot{Y}^2$ και γενικεύεται σε $E_{ολ}=\sum_i a_i X_i^2+\sum_i c_i \dot{X}_i^2$ όπου a, b, c, d, a_i, c_i σταθεροί συντελεστές. Εκφράζεται δηλαδή από άθροισμα όρων, ανεξάρτητων μεταξύ τους, στους οποίους εμφανίζονται τα τετράγωνα των κανονικών συντεταγμένων και των **κανονικών ταχυτήτων**.

(δ) Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους. Δεν ανταλλάσσουν ενέργεια. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα με δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, αν διεγερθεί μόνο ο ένας τρόπος ταλάντωσης (με κατάλληλη επιλογή των αρχικών συνθηκών), ο δεύτερος τρόπος θα απουσιάζει, χωρίς να αποκτά ενέργεια από τον τρόπο που ταλαντώνεται.

(ε) **Βαθμός ελευθερίας** είναι κάθε ανεξάρτητος τρόπος με τον οποίο ένα σύστημα μπορεί να αποκτήσει ενέργεια. Σε κάθε βαθμό ελευθερίας αντιστοιχεί η ιδιαίτερη κανονική συντεταγμένη του. Έχει δυναμική ενέργεια aX^2 και κινητική $c\dot{X}^2$.

Επανερχόμενοι τώρα στο παράδειγμα των συζευγμένων εκκρεμών, παρατηρούμε ότι η σημασία της επιλογής των X και Y έγκειται στο ότι αυτές οι παράμετροι δίνουν ένα πολύ απλό παράδειγμα κανονικών συντεταγμένων. Έχουμε δύο μεταβλητές (X, Y), τέσσερις βαθμούς ελευθερίας και, επομένως, τέσσερις κανονικές συντεταγμένες ($X, Y, \dot{X}, \dot{Y}$).

Για να απλοποιήσουμε την περιγραφή έστω ότι $X_0=Y_0=2a$ και $\phi_1=\phi_2=0$. Τότε



Η μετατόπιση του ενός εκκρεμούς κατά $2a$ παριστάνεται ως συνδυασμός των δύο κανονικών συντεταγμένων $X+Y$.

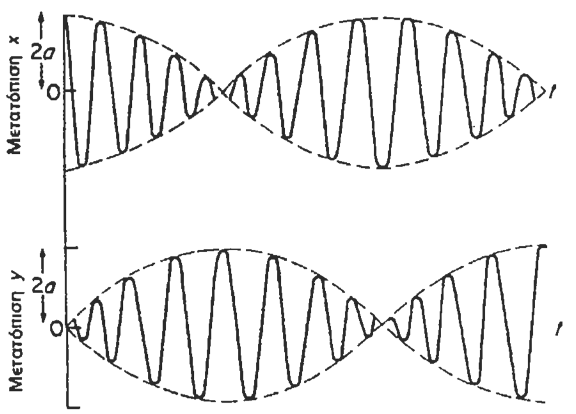
$$x = \frac{X+Y}{2} = a\cos\omega_1 t + a\cos\omega_2 t \tag{11}$$

$$y = \frac{X-Y}{2} = a\cos\omega_1 t - a\cos\omega_2 t \tag{12}$$

Π.χ., οι αρχικές μετατοπίσεις (βλ. το σχήμα που ακολουθεί) είναι: $x = 2a$, $y = 0$ όταν $t = 0$ (και $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$), μπορούν να θεωρηθούν ως ένας γραμμικός συνδυασμός του "σε φάση" τρόπου ($x = y = a$, $X_0 = x + y = 2a$) και του "εκτός φάσης" τρόπου ($x = -y = a$, $Y_0 = x - y = 2a$). Όταν αφεθούν ελεύθερες οι δύο μάζες, η κίνησή τους περιγράφεται από τις εξισώσεις,

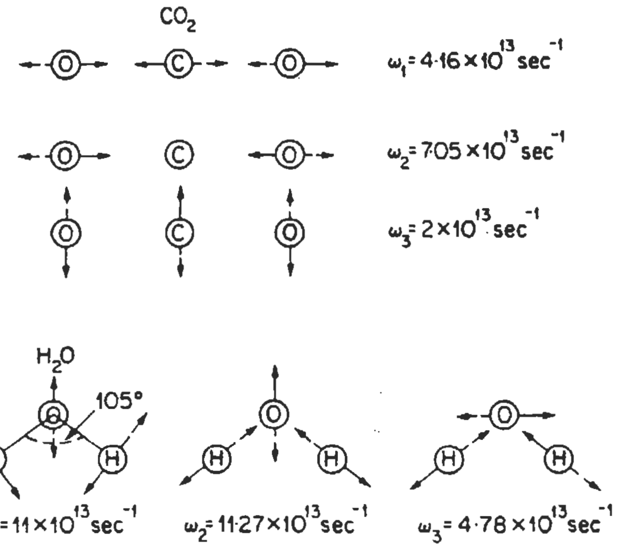
$$x = 2a\cos\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\cos\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \tag{13}$$

$$y = 2a\sin\frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}\sin\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \tag{14}$$



όπου το x εκτελεί συνημιτονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ και πλάτος που μεταβάλλεται συνημιτονικά, αργά, με γωνιακή συχνότητα $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$, και το y εκτελεί ημιτονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ και πλάτος που μεταβάλλεται, αργά, ημιτονικά με γωνιακή συχνότητα $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$.

Η ενέργεια ανταλλάσσεται πλήρως μεταξύ των δύο μαζών (στην περίπτωση ίσων μαζών και $\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{(\omega_2 - \omega_1)}$ = ακέραιος). Ακινητοποιείται πότε η μία και πότε η άλλη μάζα. Δεν υπάρχει όμως ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.



Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης των τριατομικών μορίων CO_2 και H_2O.

Τα άτομα σε πολυατομικά μόρια συμπεριφέρονται όπως οι μάζες στα εκκρεμή που εξετάσαμε (βλέπε σχήμα).

4. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις σε συστήματα με δύο βαθμούς ελευθερίας

Όταν λάβουμε υπόψη την απόσβεση, που αγνοήσαμε μέχρι τώρα, τότε βρίσκουμε ότι ο κάθε τρόπος είναι όμοιος με τον μονοδιάστατο ταλαντωτή με απόσβεση. Αν διεγείρουμε ένα τέτοιο σύστημα με εξωτερική περιοδική δύναμη μεταβλητής συχνότητας, βρίσκουμε ότι κάθε τρόπος συμπεριφέρεται σαν ένας μονοδιάστατος εξαναγκασμένος ταλαντωτής με συχνότητα συντονισμού που αντιστοιχεί στη συχνότητα του τρόπου.

Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται για περισσότερους από δύο βαθμούς ελευθερίας: Μεταβάλλοντας τη συχνότητα διέγερσης, έχουμε ένα συντονισμό κάθε φορά που η διεγείρουσα συχνότητα παίρνει τιμή ίση με την τιμή της συχνότητας ενός τρόπου.

5. Η γενική μέθοδος εύρεσης των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων

Έστω ότι για τις συντεταγμένες x και y έχουμε τις εξισώσεις κίνησης:

$$\ddot{x} = -a_{11}x - a_{12}y \tag{15}$$

$$\ddot{y} = -a_{21}x - a_{22}y \tag{16}$$

Για ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης, τα x και y ταλαντώνονται αρμονικά με την ίδια γωνιακή συχνότητα και την ίδια φάση. Έστω ότι διεγείρουμε μόνο τον ένα κανονικό τρόπο, οπότε είναι

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{17}$$

και

$$y = B\cos(\omega t + \varphi) \tag{18}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης, παίρνουμε

$$(a_{11} - \omega^2)x + a_{12}y = 0 \tag{19}$$

και $$a_{21}x + (a_{22} - \omega^2)y = 0 \qquad (20)$$
από τις οποίες προκύπτει ότι

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \omega^2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = (a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0 \qquad (21)$$

και $$\frac{y}{x} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \qquad (22)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής δίνει δύο τιμές του ω^2, και έτσι δύο θετικές τιμές του ω: τις κανονικές συχνότητες ω_1 και ω_2. Για κάθε μια από τις κανονικές συχνότητες έχουμε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης που χαρακτηρίζεται από τη γωνιακή συχνότητα ω και τον αντίστοιχο λόγο $\frac{y}{x} = \frac{B}{A}$.

Έτσι έχουμε

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{τρόπος } 1} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} \qquad (23)$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{\text{τρόπος } 2} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} \qquad (24)$$

Οι γενικές λύσεις, με τους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, είναι:

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (25)$$
$$y(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (26)$$

Οι κανονικές συντεταγμένες βρίσκονται απαλείφοντας το $\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ για την X και το $\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ για την Y (έστω). Έτσι έχουμε

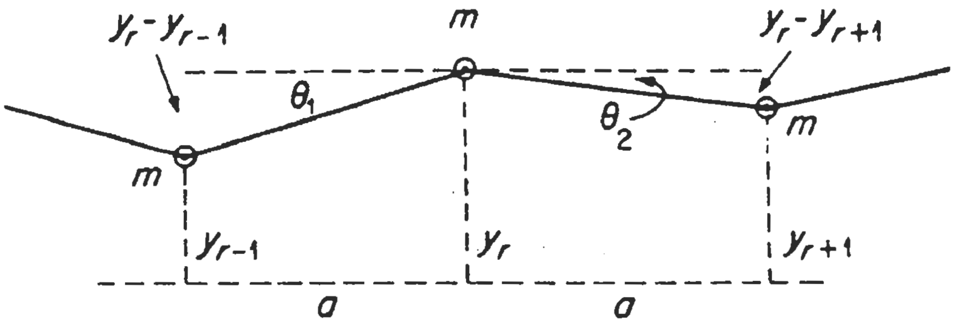
$$X \equiv \frac{\frac{B_2}{A_2}x - y}{\frac{B_2}{A_2} - \frac{B_1}{A_1}} = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad (27)$$

$$Y \equiv \frac{\frac{B_1}{A_1}x - y}{\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2}} = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (28)$$

και παίρνουμε έτσι δύο κανονικές συντεταγμένες που μεταβάλλονται, ανεξάρτητα η μία από την άλλη, με τη δική της συχνότητα η καθεμιά.

6. Συζευγμένες ταλαντώσεις χορδής με σφαιρίδια

Αβαρής χορδή με ακίνητα άκρα βρίσκεται υπό τάση T. Έχει μήκος $(n+1)a$ και πάνω της είναι στερεωμένες n ίσες μάζες m σε ίσες αποστάσεις a μεταξύ τους. Οι ταλαντώσεις των μαζών γίνονται σε ένα επίπεδο.



Μετατοπίσεις τριών μαζών που βρίσκονται πάνω σε χορδή που τείνεται με τάση T. Οι εξισώσεις κίνησης είναι $m\ddot{y}_r = T(y_{r+1} - 2y_r + y_{r-1})/a$.

Δυνάμεις πάνω στην $r-$στή μάζα (βλ. σχήμα): $T\sin\theta_1$ και $T\sin\theta_2$ προς τα κάτω. Για μικρά θ_1, θ_2 ισχύει

$$\sin\theta_1 = \frac{y_r - y_{r-1}}{a} \tag{29}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{y_r - y_{r+1}}{a} \tag{30}$$

Η εξίσωση κίνησης είναι

$$m\ddot{y}_r = -T\left(\frac{y_r - y_{r-1}}{a} + \frac{y_r - y_{r+1}}{a}\right)$$

και έτσι,

$$\ddot{y}_r = \frac{T}{ma}(y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1}) \tag{31}$$

Αν σε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης με γωνιακή συχνότητα ω η χρονική μεταβολή του y_r είναι απλή αρμονική, τότε

$$y_r = A_r e^{i\omega t} \quad \text{και} \quad y_{r-1} = A_{r-1}e^{i\omega t}, \quad y_{r+1} = A_{r+1}e^{i\omega t} \tag{32}$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ. (31):

$$-\omega^2 A_r e^{i\omega t} = \frac{T}{ma}(A_{r-1} - 2A_r + A_{r+1})e^{i\omega t}$$

από την οποία προκύπτει

$$-A_{r-1} + \left(2 - \frac{ma\omega^2}{T}\right)A_r - A_{r+1} = 0, \qquad r = 1,2....n \tag{33}$$

Για ακίνητα άκρα, έχουμε $A_0 = 0$ και $A_{n+1} = 0$, έτσι ώστε

$$
\begin{aligned}
&r=1 && \left(2-\frac{ma\omega^2}{T}\right)A_1 - A_2 = 0 \\
&r=2 && -A_1 + \left(2-\frac{ma\omega^2}{T}\right)A_2 - A_3 = 0 \\
& && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&r=n && -A_{n-1} + \left(2-\frac{ma\omega^2}{T}\right)A_n = 0
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα n εξισώσεων, δηλαδή n διαφορετικές τιμές του ω^2, ή n κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.

Για να βρούμε τη γενική λύση, ξαναγράφουμε την εξίσωση κίνησης στη μορφή

$$
\frac{A_{r-1}+A_{r+1}}{A_r} = \frac{2\omega_0{}^2-\omega^2}{\omega_0{}^2} \tag{35}
$$

όπου $\omega_0^2 = \dfrac{T}{ma}$.

Για κάποια τιμή της ω (έστω ω_s) ενός κανονικού τρόπου πρέπει να είναι

$$\frac{A_{r-1}+A_{r+1}}{A_r} = \frac{2\omega_0{}^2-\omega^2}{\omega_0{}^2} = \text{σταθερό}, \quad \text{καθώς και } A_0 = 0 = A_{n+1}.$$

Υποθέτουμε ότι για γωνιακή συχνότητα ω_s είναι $A_r = C\sin r\theta$, όπου C και θ σταθερές. Τότε

$$
\frac{A_{r-1}+A_{r+1}}{A_r} = \frac{C[\sin(r-1)\theta+\sin(r+1)\theta]}{C\sin r\theta} = \frac{2C\sin r\theta\cos\theta}{C\sin r\theta} = 2\cos\theta \tag{36}
$$

σταθερό και ανεξάρτητο του r, όπως χρειάζεται.

Για να βρούμε αυτή την τιμή του θ, δηλαδή την θ_s που αντιστοιχεί στην ω_s, χρησιμοποιούμε τις $A_0 = 0$ και $A_{n+1} = 0$ (ακίνητα άκρα), οπότε

για $r = 0$: $\quad A_0 = C\sin 0 = 0 \quad$ όπως και πρέπει, και

για $r = n+1$: $\quad A_{n+1} = C\sin(n+1)\theta_s = 0, \quad \Rightarrow \quad (n+1)\theta_s = s\pi \quad$ με $s = 1,2,\ldots..n$. $\quad$ (37)

Επομένως είναι $\theta_s = \dfrac{s\pi}{n+1}$.

Για το πλάτος A_r της $r-$στής μάζας στην κανονική συχνότητα ω_s προκύπτει

$$
A_r = C\sin\left(\frac{rs\pi}{n+1}\right) \tag{38}
$$

Για να βρούμε τις συχνότητες ω_s, χρησιμοποιούμε τις Εξ. (36) και (37), οπότε

$$\frac{A_{r-1}+A_{r+1}}{A_r} = \frac{2\omega_0{}^2-\omega_s{}^2}{\omega_0{}^2} = 2\cos\theta_s = 2\cos\frac{s\pi}{n+1}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_s^2 = 2\omega_0^2\left(1-\cos\frac{s\pi}{n+1}\right) = 4\omega_0^2 \sin^2\frac{s\pi}{2(n+1)} \qquad \text{με} \quad s = 1,2,.....n \qquad (39)$$

όπου $\omega_0^2 = \dfrac{T}{ma}$.

Για $n=1$ και $n=2$ προκύπτει εύκολα από την Εξ. (39) (ή από την Εξ. (34) με $A_0 = 0 = A_{n+1}$):

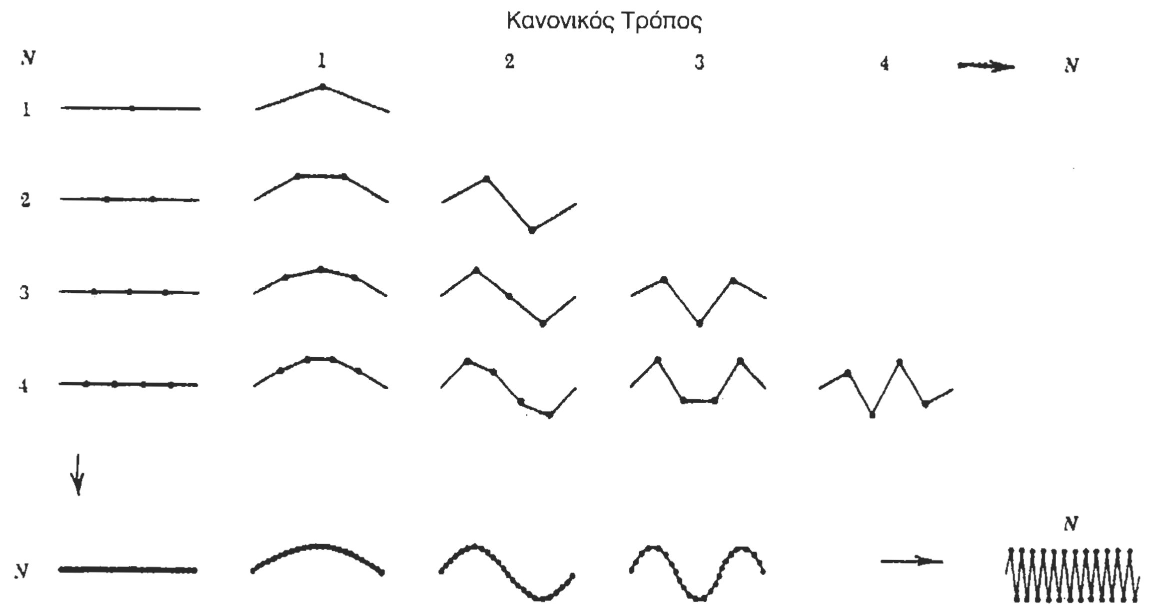
$n=1$ $\qquad \omega^2 = \dfrac{2T}{ma}$ $\qquad$ ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης

$n=2$ $\qquad \omega_1^2 = \dfrac{T}{ma}$, $\qquad A_1 = A_2$ "σε φάση" τρόπος (κανονικός τρόπος 1 στο σχήμα)

$\qquad \omega_2^2 = \dfrac{3T}{ma}$, $\qquad A_1 = -A_2$ "εκτός φάσης" τρόπος (κανονικός τρόπος 2 στο σχήμα)

Το σχήμα που ακολουθεί δείχνει τους εγκάρσιους τρόπους ταλάντωσης μιας χορής με σφαιρίδια. Μια χορδή με N σφαιρίδια έχει N κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Στον τρόπο υπ' αριθμό m, η χορδή τέμνει τον άξονα ισορροπίας $m-1$ φορές και περιέχει m μισά μήκη κύματος. Ο τρόπος με την μεγίστη συχνότητα (συχνότητα αποκοπής) είναι αυτός που αντιστοιχεί στο σχηματισμό με μορφή ζίγκ - ζάγκ. Η μέγιστη δυνατή συχνότητα είναι

$$\omega_n = \omega_0\sqrt{2\left(1-\cos\frac{n\pi}{n+1}\right)} = 2\omega_0 \sin\frac{n\pi}{2(n+1)} \qquad (\approx 2\omega_0 \text{ για μεγάλο } n) \qquad (40)$$



7. Η κυματική εξίσωση

Τι γίνεται όταν, στο όριο, η χορδή με σφαιρίδια γίνεται συνεχής χορδή με μάζα; Βρήκαμε

$$\ddot{y}_r = \frac{T}{ma}(y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1}) \tag{31}$$

Έστω τώρα ότι $a = \delta x$ και $\delta x \to 0$ καθώς οι μάζες συγχωνεύονται σε μια συνεχή χορδή με (ομοιόμορφα κατανεμημένη) μάζα. Τότε

$$\ddot{y}_r = \frac{T}{m}\left(\frac{y_{r-1} - 2y_r + y_{r+1}}{\delta x}\right) = \frac{T}{m}\left(\frac{y_{r+1} - y_r}{\delta x} - \frac{y_r - y_{r-1}}{\delta x}\right) = \frac{T}{m}\left[\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_{r+1} - \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)_r\right] \tag{41}$$

Όμως, καθώς $\delta x \to 0$, $\dfrac{\delta y}{\delta x} \to \dfrac{dy}{dx}$ και $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x+\delta x} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_x = \dfrac{d^2y}{dx^2}\delta x$.

Τότε, παραλείποντας τους δείκτες r,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{m}\frac{d^2y}{dx^2}\delta x \tag{42}$$

και για $\rho = \dfrac{m}{\delta x}$ = μάζα ανά μονάδα μήκους (γραμμική πυκνότητα μάζας), έχουμε

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{T}{\rho}\frac{d^2y}{dx^2} \tag{43}$$

ή, πιο σωστά, χρησιμοποιώντας μερικές παραγώγους επειδή $y = y(x,t)$,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{44}$$

Αυτή είναι, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, **η κυματική εξίσωση**.
Γενικά, η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{45}$$

είναι η εξίσωση κύματος σε μία διάσταση, την x. Η ταχύτητα κύματος είναι c (για τη χορδή $c = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$).